Örnek: $f(t)=t$ ise $\mathcal{L}\{t\}=?$

$$\mathcal{L}\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt=\lim_{A\to\infty}\int_0^A t\,e^{-st}dt \left[\begin{array}{l} u=t\\ du=dt\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} dv=e^{-st}dt\\ v=-\frac{1}{s}e^{-st}\end{array}\right] = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^A+\frac{1}{s}\int_0^A e^{-st}dt\right]$$

$$=\frac{1}{s}\lim_{A\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^A=\frac{1}{s^2},\ s>0$$

$f(t)=t^n$ ise $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$

f_1 ve f_2 sırasıyla $s>a_1$ ve $s>a_2$ için Laplace dönüşümüne sahip ise s, a_1 ve a_2'nin maksimumundan büyük olmak üzere

$$\mathcal{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(c_1f_1(t)+c_2f_2(t))\,dt$$

$$=c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt+c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)\,dt$$

$$=c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

dır. Yani Laplace dönüşümü lineer bir operatördür.

6.2 Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümleri

Teorem: $0\le t\le A$ aralığında f sürekli ve f' parçalı sürekli olsun. Hatta $t\ge M$ için $|f(t)|\le Ke^{at}$ olacak şekilde K, a, M sabitleri olsun. Bu durumda $s>a$ için $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ vardır ve

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$$

dır.

Kanıt: $\mathcal{L}\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$ var olduğunu göstermemiz gerekir.

$0\le t\le A$, aralığında f', $t_1,t_2,\dots,t_n$ noktalarında süreksiz olsun.

$$\int_0^A e^{-st}f'(t)\,dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^{t_1}+e^{-st}f(t)\Big|_{t_1}^{t_2}+\dots+e^{-st}f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$

$$+s\left(\int_0^{t_1}e^{-st}f(t)\,dt+\dots+\int_{t_n}^A e^{-st}f(t)\,dt\right)$$

$$=e^{-sA}f(A)-f(0)+s\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt$$

$s>a$, $A\to\infty$, $e^{-sA}f(A)\to 0$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0)$$

Eğer f' ve f'' teoremdeki aynı şartları sağlarsa f'''nün Laplace dönüşümü vardır ve $s>a$ için

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}=s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$$

dır.

Sonuç: $0\le t\le A$ aralığında $f, f',\dots,f^{(n-1)}$ fonksiyonları sürekli ve $f^{(n)}$ parçalı sürekli olsun. Hatta $t\ge M$ için $|f(t)|\le Ke^{at}$, $|f'(t)|\le Ke^{at},\dots,|f^{(n-1)}(t)|\le Ke^{at}$ olacak şekilde K, a, M sabitleri var olsun. Bu durumda $s>a$ için $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ vardır ve

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\mathcal{L}\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\dots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

dır.

Şimdi Laplace dönüşümünün başlangıç değer ~~prob~~ problemine nasıl uygulandığını görelim.

$y''-y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ başlangıç değer probleminin çözümü daha önceki bilgilerimize göre,

$$r^2-r-2=0 \Rightarrow (r+1)(r-2)=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2 \text{ ve genel çözüm}$$

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$$

ve başlangıç koşullarını sağlayan c_1, c_2 değerleri sırasıyla $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ olduğundan

$$y=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$$

dir. Şimdi verilen problemi Laplace dönüşümü ile çözelim. Problemin bir $y=\phi(t)$ çözümünün olduğunu ve ilk iki türevin sonuçtaki şartları sağladığını

düşünelim. Laplace dönüşümünün lineerliğini kullanarak dif. denkleme uygularsak

$$\mathcal{L}\{y''\}-\mathcal{L}\{y'\}-2\mathcal{L}\{y\}=0$$

dır.

$$s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)-[s\mathcal{L}\{y\}-y(0)]-2\mathcal{L}\{y\}=0$$

$Y(s)=\mathcal{L}\{y\}$ dersek

$$(s^2-s-2)Y(s)+(1-s)y(0)-y'(0)=0$$

$$Y(s)=\frac{s-1}{s^2-s-2}=\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$$

elde ederiz. Başlangıç değer probleminin çözümü $y=\phi(t)$ nin Laplace dönüşümü $Y(s)$ elde edilmiş oldu.

$\phi(t)$'yi belirlemek için Laplace dönüşümü $Y(s)$ olan fonksiyonu bulmak gerekir.

$$Y(s)=\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}=\frac{1/3}{s-2}+\frac{2/3}{s+1}$$

$\frac{1}{3}e^{2t}$'nin Laplace dönüşümü $\frac{1/3}{s-2}$ ve $\frac{2}{3}e^{-t}$'nin Laplace dönüşümü $\frac{2/3}{s+1}$ olduğundan

$$y=\phi(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$$

dir.

Laplace dönüşümü ile adi dif. denklemlerin çözümü cebirsel denklemlere indirgenir. Böylece başlangıç değer problemlerinin çözümü kolaylıkla bulunur. Homojen olmayan denklemlerde homojen kısmın çözümüne gerek kalmaz.

Laplace dönüşümü $f(t)$ fonksiyonunu, s'ye bağlı $F(s)$ fonksiyonuna dönüştürür. Ters Laplace dönüşümü ise, $F(s)$ fonksiyonunu t'ye bağlı $f(t)$ fonksiyonuna dönüştürür.

Ters Laplace dönüşümü $\mathcal{L}^{-1}$ ile gösterilir.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=y(t)$$

$\mathcal{L}^{-1}$'de lineer bir operatördür.

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n; $n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
9. $e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

Örnekler 1) $y'' - 2y' + 2y = \cos t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$
başlangıç değer problemini çöz.

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\cos t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^2-2s+2)Y(s) + 2 - s = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} + \frac{s-2}{s^2-2s+2} = \frac{s^3-2s^2+2s-2}{(s^2+1)((s-1)^2+1)}$$

$$= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+1} + \frac{\frac{4}{5}s - \frac{6}{5}}{(s-1)^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t + \frac{4}{5}e^t\cos t - \frac{2}{5}e^t\sin t$$

2) $y^{IV} - y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$, $y'''(0)=0$
başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\mathcal{L}\{y^{IV}\} - \mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0$$

$$(s^4-1)Y(s) = s(s^2+1)$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2-1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \cosh t$$

3) $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$

başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\mathcal{L}\{y'''\} + \mathcal{L}\{y'\} = 0$$

$$s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + [s Y(s) - y(0)] = 0$$

$$(s^3 + s) Y(s) = s + 2 \Rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$Y(s) = 2\frac{1}{s} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

$$y(t) = 2 - 2\cos t + \sin t$$

(7. hafta 1. derste yapılmıştı)

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

başlangıç değer prob. çöz.

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - 4[s Y(s) - y(0)] + 4 Y(s) = 0$$

$$(s^2 - 4s + 4) Y(s) = 3 \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{(s-2)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2}\right\} = 3te^{2t}$$